



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Modello di Bose-Hubbard a due siti: proprietà statiche e dinamiche

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Andrea Veronese

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	1
2	Modello di Bose-Hubbard per un sistema di N bosoni	3
2.1	Hamiltoniana di Bose-Hubbard	3
2.2	Stati coerenti bosonici ed equazioni di Josephson	4
3	Modello di Bose-Hubbard per un sistema di N <i>anyons</i>	7
3.1	Trasformazioni di Jordan-Wigner e Hamiltoniana di Bose-Hubbard “anyonica”	7
3.2	Trattazione con gli stati coerenti	8
3.3	Sistema linearizzato della hamiltoniana anyonica	10
3.4	Punti critici del sistema non-linearizzato	13
3.5	Analisi numerica del sistema a N <i>anyons</i>	14
4	Conclusioni	19
	Bibliografia	21

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare il modello di Bose-Hubbard a due siti per un sistema di N bosoni e di proporre un'estensione di tale modello al caso di un sistema di N *anyons*. Nel caso in esame si parte dallo studio di un sistema di N bosoni interagenti tra loro e soggetti ad un potenziale simmetrico a doppia buca ricavando la hamiltoniana di Bose-Hubbard valida sotto approssimazione di campo medio con alto numero di particelle debolmente interagenti. Sotto tali approssimazioni è possibile trattare il sistema facendo uso degli stati coerenti, noti anche come stati di Glauber, introdotti dal fisico americano Roy J. Glauber nel 1963 [1]. Vennero applicati, dapprima, nel campo dell'ottica quantistica come stati quantistici dell'oscillatore armonico quantistico, con la particolarità di descrivere una dinamica simile a quella dell'oscillatore armonico classico. Tuttavia, il loro significato venne molto presto esteso ad altre aree della fisica, in particolare nel campo della fisica della materia condensata, in cui vennero applicati nello studio del fenomeno di condensato di Bose-Einstein e nello studio di regimi di superfluidità e superconduttività (vedi [2], [3], [4]). Nel caso, oggetto di studio, di bosoni in un potenziale a doppia buca si vedrà come l'applicazione degli stati coerenti all'evoluzione temporale del sistema porta a ricavare delle equazioni che predicono il passaggio di corrente tra due superconduttori separati da un sottile strato isolante, senza l'applicazione di alcun potenziale. Tali equazioni sono note come equazioni di Josephson [5] e valsero il premio nobel al fisico gallese Brian David Josephson nel 1962.

Partendo da tali risultati, si studierà poi un sistema simile a quello descritto dalla hamiltoniana di Bose-Hubbard a due siti sostituendo alle particelle bosoniche *anyons*. La hamiltoniana che descrive questo sistema ha una forma particolare ed è possibile ottenerla dalla hamiltoniana di Bose-Hubbard a due siti per un sistema di N bosoni tramite una particolare trasformazione di Jordan-Wigner frazionaria [6], che mappa operatori di creazione e annichilazione anyonici nei corrispondenti operatori bosonici. Supponendo che tale trasformazione non comprometta le condizioni di validità del modello di Bose-Hubbard, si procederà ad analizzare il sistema con una metodologia analoga a quella usata nel caso bosonico. In particolare, si farà uso, ancora una volta, degli stati coerenti bosonici nell'evoluzione temporale per poter ottenere la dinamica quantistica del sistema.

Per studiare più in dettaglio la statica e la dinamica, verranno proposte le soluzioni per il sistema linearizzato dell'hamiltoniana e i punti critici del sistema non-linearizzato. Infine, per validare i risultati analitici e per ottenere maggiori informazioni, verrà eseguita un'analisi numerica della dinamica quantistica del sistema variando i parametri di controllo delle equazioni differenziali che lo caratterizzano e andando a studiare la risposta del sistema a tali variazioni.

Capitolo 2

Modello di Bose-Hubbard per un sistema di N bosoni

2.1 Hamiltoniana di Bose-Hubbard

Nel formalismo della seconda quantizzazione, la hamiltoniana di un sistema a molti bosoni può essere scritta, in funzione delle coordinate spaziali, come [7]

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

dove $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ descrive l'operatore di campo bosonico. In particolare si è interessati a trattare un sistema di N bosoni interagenti immersi in un potenziale a doppia buca nella direzione assiale x e armonico nel piano trasverso (y, z) . L'espressione analitica del potenziale richiesto può essere vista come:

$$U(\mathbf{r}) = V_{db}(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 (y^2 + z^2). \quad (2.2)$$

Inoltre, si assuma che il sistema si trovi a temperatura nulla, quindi nel suo stato fondamentale, e con potenziale di interazione intra-particellare lo pseudo-potenziale di Fermi a contatto: $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, dove g rappresenta la forza dell'interazione.

Se la frequenza di confinamento armonico nel piano trasverso, ω , è sufficientemente ampia, il sistema può essere approssimato come quasi-unidimensionale ed è possibile riscrivere l'operatore bosonico come:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \hat{\phi}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi} I} e^{\frac{-(y^2+z^2)}{2I^2}}, \quad (2.3)$$

dove $\hat{\phi}(x)$ è l'operatore di campo bosonico unidimensionale nella direzione assiale x , mentre il termine restante è dato dal prodotto di funzioni d'onda dello stato fondamentale di oscillatore armonico, in cui $I = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ è la lunghezza di confinamento caratteristica.

È possibile semplificare ulteriormente l'espressione dell'operatore di campo bosonico. L'operatore $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ è tale per cui distrugge un bosone con coordinata \mathbf{r} e segue le regole di commutazione canoniche: $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ e $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0$. Confrontando tali proprietà con l'espressione trovata prima per $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ (2.3), si vede che esse vengono ereditate da $\hat{\phi}(x)$, per cui $\hat{\phi}(x)$ distrugge un bosone in posizione x e segue le regole di commutazione canoniche: $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(x')] = \delta(x - x')$ e $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = [\hat{\phi}^\dagger(x), \hat{\phi}^\dagger(x')] = 0$. Si assuma, ora, che il potenziale a doppia buca $V_{db}(x)$ abbia massimo in zero e che le particelle nelle due buche possano occupare solamente lo stato fondamentale di singola particella e il primo stato eccitato di singola particella. Sotto tali assunzioni è possibile operare l'approssimazione a due modi [8] e scrivere, quindi, l'operatore bosonico unidimensionale come

$$\hat{\phi}(x) = \hat{a}_L \phi_L(x) + \hat{a}_R \phi_R(x), \quad (2.4)$$

dove \hat{a}_j con $j = L, R$ è l'operatore di annichilazione bosonico nella buca j -esima, mentre $\phi_j(x)$ è la funzione d'onda di singola particella, che si assume strettamente localizzata nella buca j -esima¹.

Inserendo (2.2), (2.3) e l'approssimazione a due modi nella hamiltoniana (2.1) si ottiene la hamiltoniana di Bose-Hubbard a due siti

$$\hat{H} = E_L \hat{n}_L + E_R \hat{n}_R - J_{LR} \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R - J_{RL} \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L + \frac{U_L}{2} \hat{n}_L (\hat{n}_L - 1) + \frac{U_R}{2} \hat{n}_R (\hat{n}_R - 1), \quad (2.5)$$

dove $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ è l'operatore numero della buca j -esima, E_j è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale della buca j -esima, data da

$$E_j = \int dx \phi_j(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{db}(x) + \hbar\omega \right] \phi_j(x), \quad (2.6)$$

J_{ij} è l'energia di tunneling tra la buca i -esima e la buca j -esima, data da

$$J_{ij} = \int dx \phi_i(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{db}(x) + \hbar\omega \right] \phi_j(x), \quad (2.7)$$

e U_j è l'energia di interazione intra-particellare nella buca j -esima, data da

$$U_j = \frac{g}{2\pi I^2} \int dx |\phi_j(x)|^4, \quad (2.8)$$

con $j = L, R$. Se la doppia buca di potenziale è completamente simmetrica allora $E_L = E_R = E$, $J_{LR} = J_{RL} = J$ e $U_L = U_R$. Sapendo che il termine $\hat{n} = \hat{n}_L + \hat{n}_R$ non influisce sulle proprietà dinamiche del sistema dato che è costante, si può riscrivere la hamiltoniana di Bose-Hubbard a due siti, nel caso in cui $V_{db}(x)$ sia simmetrico, come:

$$\hat{H} = -J \left(\hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L \right) + \frac{U}{2} [\hat{n}_L (\hat{n}_L - 1) + \hat{n}_R (\hat{n}_R - 1)]. \quad (2.9)$$

Si conclude ricordando che sebbene la hamiltoniana di Bose-Hubbard dia una descrizione abbastanza esaustiva del sistema in esame, nel ricavarla si sono fatte diverse ipotesi che ne determinano la validità. Si è assunto che il sistema si trovi a temperatura nulla, tralasciando quindi lo studio degli stati eccitati, e si è tenuto conto delle sole interazioni a contatto tra le particelle, trascurando quindi possibili interazioni a distanza. Inoltre, si sono assunte le funzioni d'onda strettamente localizzate e il potenziale perfettamente simmetrico.

2.2 Stati coerenti bosonici ed equazioni di Josephson

Gli stati coerenti vennero introdotti da Roy Glauber nel 1963 [1]. Essi sono definiti come gli autostati dell'operatore di annichilazione, cioè

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha(t) |\alpha\rangle \quad (2.10)$$

$$\langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \alpha^*(t) \langle \alpha |, \quad (2.11)$$

con $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Per definizione essi non sono autostati dell'operatore numero $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Si può, quindi, trovare un'espansione degli stati coerenti nella base di Fock degli autostati dell'operatore numero $|n\rangle$. Si trova che tale espansione è la seguente:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.12)$$

¹ Le funzioni d'onda delle singole buche sono combinazioni lineari della funzione d'onda dello stato fondamentale, $\phi_0(x)$, e della funzione d'onda del primo stato eccitato, $\phi_1(x)$. In particolare: $\phi_L(x) = \frac{1}{2}[\phi_0(x) + \phi_1(x)]$ e $\phi_R(x) = \frac{1}{2}[\phi_0(x) - \phi_1(x)]$

Inoltre, dalle equazioni (2.10) e (2.11) si trova che $\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$. Allora, essendo α un numero complesso è possibile scriverlo in rappresentazione di Eulero come segue:

$$\alpha = \sqrt{\bar{N}} e^{i\phi}, \quad (2.13)$$

dove $\bar{N} = |\alpha|^2$ è il numero medio di particelle nello stato coerente, mentre ϕ è la fase dello stato coerente.

Alla luce di tali risultati, si calcola il valore di aspettazione della hamiltoniana di Bose-Hubbard nello stato coerente $|\alpha_L \alpha_R\rangle = |\alpha_L\rangle \otimes |\alpha_R\rangle$ dato dal prodotto tensore tra lo stato coerente nella buca di sinistra e lo stato coerente nella buca di destra. Il risultato di tale valore di aspettazione è:

$$\langle \alpha_L \alpha_R | \hat{H} | \alpha_L \alpha_R \rangle = -J (\alpha_L^* \alpha_R + \alpha_R^* \alpha_L) + \frac{U}{2} [|\alpha_L|^4 + |\alpha_R|^4]. \quad (2.14)$$

Come mostreremo in maniera più dettagliata nella *Sezione (3.2)* per il caso anyonico, dall'hamiltoniana mediata sugli stati coerenti è possibile ottenere le equazioni del moto per la differenza di fase tra gli stati coerenti della buca di destra e della buca di sinistra $\phi(t)$, e per lo squilibrio di popolazione $z(t)$, che in termini matematici può essere visto come il momento generalizzato di $\phi(t)$. Le espressioni per $\phi(t)$ e per $z(t)$ sono:

$$\phi(t) := \phi_R(t) - \phi_L(t) \quad (2.15)$$

$$z(t) := \frac{\bar{N}_L(t) - \bar{N}_R(t)}{N}, \quad (2.16)$$

dove $N = \bar{N}_L(t) + \bar{N}_R(t)$ è il numero totale di particelle nel sistema. La hamiltoniana (2.14) riscritta in queste nuove coordinate diventa:

$$H = \langle \hat{H} \rangle = -JN \sqrt{1 - z(t)^2} \cos(\phi(t)) + \frac{UN^2}{4} z^2(t) \quad (2.17)$$

Ricavando le equazioni del moto di $\phi(t)$ e $z(t)$ si trovano le equazioni di Josephson [5]:

$$\hbar \dot{\phi} = J \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \cos(\phi(t)) + \frac{UN}{2} z(t) \quad (2.18)$$

$$\hbar \dot{z} = -J \sqrt{1 - z^2(t)} \sin(\phi(t)). \quad (2.19)$$

Per quanto riguarda il sistema bosonico si scenderà più in dettaglio di così, in quanto esso è ampiamente trattato in vari articoli come [9]. Inoltre, nel prossimo capitolo vedremo che il sistema bosonico appare come caso particolare del sistema anyonico ed è quindi possibile ricavare da quest'ultimo i risultati per il sistema bosonico.

Capitolo 3

Modello di Bose-Hubbard per un sistema di N *anyons*

In dimensione 3 il concetto di indistinguibilità della meccanica quantistica porta alla creazione di due *settori di superselezione*: uno relativo a particelle le cui funzioni d'onda sono simmetriche per scambio (bosoni) e uno relativo a particelle le cui funzioni d'onda sono anti-simmetriche per scambio (fermioni). Ciò deriva dal fatto che in 3D, le particelle sono una rappresentazione del gruppo delle permutazioni i cui autovalori possibili sono: ± 1 . Tuttavia, negli anni '70 venne congetturata per la prima volta l'esistenza, in dimensioni minori di quella fisica, di quasi-particelle, ossia enti, presenti solo in sistemi con determinate condizioni, i quali si comportano come particelle elementari all'interno di tali sistemi. Il primo esempio concreto dell'esistenza degli *anyons* si ebbe negli anni '80 in un sistema di elettroni bidimensionale con effetto Hall quantistico frazionario [10].

In dimensione 2 si trova che il gruppo che regola gli scambi è il gruppo delle trecce le cui rappresentazioni sono operatori che non presentano il vincolo $\hat{O}^2 = \mathbb{1}$ e ammettono quindi come autovalori tutti i numeri complessi di modulo uno: $e^{i\theta}$. Ciò porta ad avere che per due quasi-particelle in 2D, le quali furono chiamate da Frank Wilczek con il nome di *anyons* [11], la funzione d'onda acquista una fase frazionaria $e^{i\theta}$ per scambio di particelle, con $\theta \in [0, \pi]$. È possibile notare che per $\theta = 0$ si ottiene la regola di scambio bosonica, mentre per $\theta = \pi$ si ottiene la regola di scambio fermionica. La fisica degli *anyons* rimase confinata al caso bidimensionale fino al 1991 quando, il fisico britannico Frederick Duncan Haldane propose un modello di statistica frazionaria in dimensione arbitraria che generalizza il principio di Pauli [12]. Alla luce di tale risultato diventa possibile considerare l'esistenza di *anyons* anche nel caso unidimensionale, dei quali si farà uso nelle sezioni seguenti.

3.1 Trasformazioni di Jordan-Wigner e Hamiltoniana di Bose-Hubbard “anyonica”

Si vuole, ora, provare ad estendere il modello appena illustrato al caso di N *anyons* interagenti immersi in un potenziale a doppia buca nella direzione assiale x e armonico nel piano trasverso (y, z) .

Nel caso unidimensionale, gli operatori di creazione e annichilazione anyonici, \hat{a}_i^\dagger e \hat{a}_i , in cui l'indice i si riferisce al sito sul quale agiscono, sono definiti dalla seguenti regole di commutazione [13]:

$$\hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - e^{-i\theta \text{sgn}(i-j)} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i = \delta_{ij} \quad (3.1)$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_j - e^{i\theta \text{sgn}(i-j)} \hat{a}_j \hat{a}_i = 0, \quad (3.2)$$

con $\text{sgn}(i-j) = 0$ e $\theta \in [0, \pi]$ parametro statistico anyonico.

Attraverso una trasformazione di Jordan-Wigner frazionaria, è possibile mappare operatori anyonici in

operatori bosonici, e viceversa. Si definisce tale trasformazione come [14]:

$$\hat{a}_i = \hat{b}_i \exp \left(i\theta \sum_{k=1}^{i-1} \hat{n}_k \right), \quad (3.3)$$

dove i \hat{b}_i sono appunto gli operatori bosonici caratterizzati dalle regole di commutazione canoniche: $[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = \delta_{ij}$ e $[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0$. L'operatore definito come $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ è l'operatore numero del sito i -esimo.

Si vuole verificare che, effettivamente gli operatori \hat{a}_i , scritti nella forma (3.3), seguano le regole di commutazione anyoniche. Si suppone, senza perdita di generalità, che $i < j$. Si trovano, quindi, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger &= \hat{b}_i e^{-i\theta \sum_{i \leq k < j} \hat{n}_k} \hat{b}_j^\dagger \\ &= e^{-i\theta \sum_{i < k < j} \hat{n}_k} \hat{b}_i \hat{b}_j^\dagger e^{-i\theta \hat{n}_i} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} f(\theta) \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i &= e^{-i\theta \sum_{i < k < j} \hat{n}_k} e^{-i\theta \hat{n}_i} f(\theta) \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i \\ &= e^{-i\theta \sum_{i < k < j} \hat{n}_k} f(\theta) \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si prenda $f(\theta) = e^{i\theta \text{sgn}(i-j)}$ in modo tale che, nel caso considerato in cui $i < j$, $f(\theta) = e^{-i\theta}$. È possibile, allora, riottenere le regole di commutazione anyoniche per gli $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - f(\theta) \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i &= e^{-i\theta \sum_{i < k < j} \hat{n}_k} (\hat{b}_i \hat{b}_j^\dagger e^{-i\theta \hat{n}_i} - e^{-i\theta(\hat{n}_i+1)} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i) \\ &= e^{-i\theta \sum_{i < k < j} \hat{n}_k} e^{-i\theta(\hat{n}_i+1)} [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

È facile vedere che, in maniera analoga, si ottengono risultati in accordo con le regole di commutazione anyonica anche per i casi $i > j$ e $i = j$, notando per quest'ultimo che, $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ e che $f(\theta) = 1$.

Usando la relazione tra operatori anyonici e operatori bosonici, è possibile, quindi, scrivere un analogo del hamiltoniana di Bose-Hubbard per il caso anyonico in termini degli usuali operatori bosonici \hat{b}_i . Se si considera un sistema di N anyons e K siti si trova la seguente espressione per la nuova hamiltoniana, chiamata hamiltoniana *Anyon-Hubbard* [15]:

$$\hat{H} = -J \sum_j^{K-1} (e^{-i\theta \hat{n}_j} \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} e^{i\theta \hat{n}_j}) + \frac{U}{2} \sum_j^K \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1), \quad (3.7)$$

in cui si è assunto che l'energia di Tunneling $J_{j,j+1} = J$, $\forall j$ con $j = 1, \dots, K$, e che l'energia di interazione tra particelle all'interno del singolo sito $U_j = U$, $\forall j$ con $j = 1, \dots, K$.

Nel caso in cui i siti siano 2 (L, R), l'hamiltoniana Anyon-Hubbard diventa:

$$\hat{H} = -J(e^{-i\theta \hat{n}_R} \hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_L e^{i\theta \hat{n}_R}) + \frac{U}{2} [\hat{n}_L(\hat{n}_L - 1) + \hat{n}_R(\hat{n}_R - 1)]. \quad (3.8)$$

3.2 Trattazione con gli stati coerenti

Ci si focalizza, ora, sull'evoluzione temporale del sistema anyonico descritto dall'hamiltoniana di Anyon-Hubbard appena descritta. L'evoluzione temporale di un generico stato quantistico $|\psi(t)\rangle$ del sistema descritto dalla hamiltoniana è data dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (3.9)$$

Le equazioni di evoluzione temporale possono essere derivate trovando gli estremi dell'azione

$$S = \int dt \langle \psi(t) | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) | \psi(t) \rangle, \quad (3.10)$$

caratterizzata dalla Lagrangiana

$$L = \langle \psi(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle. \quad (3.11)$$

Si studia, ora, il sistema descritto da (3.8) con il metodo degli stati coerenti. Gli stati coerenti, come si è visto in (2.2), sono definiti come autofunzioni dell'operatore di annichilazione bosonico

$$\hat{b}_j |\beta_j\rangle = \beta_j |\beta_j\rangle \quad (3.12)$$

$$\langle \beta_j | \hat{b}_j^\dagger = \beta_j^* \langle \beta_j |, \quad (3.13)$$

dove $j = L, R$ e $\beta_j \in \mathbb{C}$.

Dalla definizione data è possibile vedere che $\langle \beta_j | \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j | \beta_j \rangle = \langle \beta_j | \hat{n}_j | \beta_j \rangle = |\beta_j|^2$. A questo punto si calcola il valore di aspettazione dell'Hamiltoniana nello stato coerente composito dei due siti: $|\beta_L \beta_R\rangle = |\beta_L\rangle \otimes |\beta_R\rangle$:

$$\langle \beta_L \beta_R | \hat{H} | \beta_L \beta_R \rangle = -J \left(e^{-i\theta|\beta_R|^2} \beta_L^* \beta_R + \beta_R^* \beta_L e^{i\theta|\beta_R|^2} \right) + \frac{U}{2} \left[|\beta_L|^4 + |\beta_R|^4 \right]. \quad (3.14)$$

Scrivendo l'autovalore β_j in rappresentazione di Eulero come

$$\beta_j = \sqrt{\bar{N}_j(t)} e^{i\phi_j(t)}, \quad (3.15)$$

in cui $\bar{N}_j(t) = |\beta_j|^2$ è il numero medio di particelle nel sito j al tempo t e $\phi_j(t)$ la fase bosonica nel sito j al tempo t , si può riscrivere il valore di aspettazione per \hat{H} nello stato coerente $|\beta_L \beta_R\rangle$ nella seguente forma:

$$\langle \hat{H}(t) \rangle = -2J \sqrt{\bar{N}_L(t) \bar{N}_R(t)} \cos(\phi_R(t) - \phi_L(t) - \bar{N}_R(t)\theta) + \frac{U}{2} \left[\bar{N}_L^2(t) + \bar{N}_R^2(t) \right]. \quad (3.16)$$

Si introducono, nuovamente, le variabili differenza di fase $\phi(t)$, e squilibrio di popolazione $z(t)$, definite come:

$$\phi(t) := \phi_R(t) - \phi_L(t) \quad (3.17)$$

$$z(t) := \frac{\bar{N}_L(t) - \bar{N}_R(t)}{N}, \quad (3.18)$$

dove $N = \bar{N}_L(t) + \bar{N}_R(t)$ è fisso e rappresenta il numero totale di particelle del sistema. È possibile allora riscrivere la (3.16) in funzione delle nuove variabili introdotte,

$$H(t) = \langle \hat{H}(t) \rangle = -NJ \sqrt{1 - z^2(t)} \cos \left[\phi(t) - \frac{N(1 - z(t))}{2} \theta \right] + \frac{N^2 U}{4} z^2(t). \quad (3.19)$$

Ci si concentra, ora, a trovare un'espressione, in termini di $\phi(t)$ e $z(t)$, del primo termine della lagrangiana (3.11). Usando la definizione di stato coerente (3.12-3.13) e le regole di commutazione degli operatori di creazione e annichilazione si arriva a scrivere lo stato coerente $|\beta_j(t)\rangle$ nella forma di Glauber:

$$|\beta_j(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta_j(t)|^2} e^{\beta_j(t)\hat{b}_j^\dagger} |0\rangle. \quad (3.20)$$

Sfruttando, allora, il risultato appena ottenuto e la rappresentazione di Eulero (3.15) dell'autovalore $\beta_j(t)$ si trova che

$$i\hbar \langle \beta_L \beta_R | \frac{\partial}{\partial t} | \beta_L \beta_R \rangle = N \hbar z(t) \dot{\phi}(t). \quad (3.21)$$

Unendo i risultati trovati si ottiene

$$L(t) = N\hbar z(t)\dot{\phi}(t) + NJ\sqrt{1-z^2(t)} \cos \left[\phi(t) - \frac{N(1-z(t))}{2}\theta \right] - \frac{N^2U}{4}z^2(t). \quad (3.22)$$

Nella Lagrangiana (3.22), la coordinata dinamica è $\phi(t)$, mentre $z(t)$ può essere interpretato come il momento generalizzato associato alla coordinata $\phi(t)$. Trovando gli estremi dell'azione S , si ricavano, quindi, le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana (3.22), che esplicitate diventano le seguenti:

$$\hbar\dot{\phi}(t) = J \frac{z(t)}{\sqrt{1-z^2(t)}} \cos [\phi(t) - \theta_z(t)] + J \sqrt{\frac{1+z(t)}{1-z(t)}} \theta_z(t) \sin [\phi(t) - \theta_z(t)] + \frac{NU}{2}z(t) \quad (3.23)$$

$$\hbar\dot{z}(t) = -J\sqrt{1-z^2(t)} \sin [\phi(t) - \theta_z(t)], \quad (3.24)$$

dove $\theta_z(t) := N(1-z(t))\theta/2$. È facile notare che per $\theta = 0$ riottengono le equazioni di Josephson (2.18 - 2.19).

3.3 Sistema linearizzato della hamiltoniana anyonica

Si vuole trattare, ora, il caso delle ‘piccole oscillazioni’. In particolare si è interessati alle oscillazioni del sistema intorno all'origine $(\phi, z) = (0, 0)$. È possibile vedere che valutando le equazioni del moto (20-21) in $(0, 0)$ si ottiene:

$$0 = -J\theta_0 \sin(\theta_0) \quad (3.25)$$

$$0 = J \sin(\theta_0), \quad (3.26)$$

con $\theta_0 := N\theta/2$. Quindi, affinché $(\phi, z) = (0, 0)$ sia punto stazionario si deve imporre una condizione su θ , cioè

$$\theta = \frac{2\pi}{N}k \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

e dato che per definizione $\theta \in [0, \pi]$, allora $k \in [0, N/2]$.

Si vorrebbe studiare il sistema linearizzato. Si nota che se $z \rightarrow 0$ allora $\theta_z = N(1-z(t))\theta/2 \rightarrow \pi k$ e quindi sono valide le espansioni

$$\cos\theta_z = (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2}\pi^2 k^2 z^2 \right) + o(z^3) \quad (3.28)$$

$$\sin\theta_z = (-1)^{k+1} \pi k z + o(z^3). \quad (3.29)$$

Andando a sviluppare la hamiltoniana (3.19) al secondo ordine nell'intorno del punto stazionario tenendo conto delle espansioni per $\cos\theta_z$ e $\sin\theta_z$ appena ottenute, si trova che l'espressione per la hamiltoniana del sistema linearizzato è:

$$H(t) \simeq (-1)^k NJ \left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\pi^2 k^2 z^2 + \frac{1}{2}\phi^2 + \pi k z \phi \right) + \frac{N^2U}{4}z^2. \quad (3.30)$$

Con lo stesso procedimento usato nella sezione precedente (3.2) si trovano le equazioni del moto per il sistema linearizzato:

$$\hbar\dot{\phi}(t) \simeq (-1)^k \pi k J \phi + \left[(-1)^k J(1 + \pi^2 k^2) + \frac{UN}{2} \right] z \quad (3.31)$$

$$\hbar\dot{z}(t) \simeq (-1)^{k+1} J \phi - (-1)^k \pi k J z. \quad (3.32)$$

La (3.31) è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti $\dot{y} = Ay$, le cui soluzioni sono della

forma: $y(t) = y_0 e^{At}$, con $y_0 = y(0)$. Nel caso in esame $A \in M_2(\mathbb{C})$ e $y \in \mathbb{R}^2$. Riscrivendo le equazioni differenziali in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

dove si è preso $y = (\phi, z)^T$ e A la matrice le cui entrate sono: $a = (-1)^k \pi k J / \hbar$, $b = [(-1)^k J(1 + \pi^2 k^2) + \frac{UN}{2}] / \hbar$ e $c = (-1)^{k+1} J / \hbar$. Per studiare la (3.33) è necessario trattare separatamente i 3 casi:

- (i) $\Delta > 0$: due radici reali distinte,
- (ii) $\Delta < 0$: due radici complesse coniugate,
- (iii) $\Delta = 0$: due radici reali e coincidenti,

dove

$$\Delta = (Tr A)^2 - 4 \det A = \frac{4}{\hbar^2} J^2 [(-1)^{k+1} \Lambda - 1] \quad (3.34)$$

rappresenta il discriminante dell'equazione secolare associata a (3.33). È possibile riscrivere le condizioni per i casi (i), (ii) e (iii) in termini di quantità più familiari per il sistema oggetto di studio. In particolare, si nota che il discriminante Δ è funzione dell'energia adimensionale Λ e del numero intero $k = \frac{N}{2\pi} \theta$ che discretizza, in funzione di θ , i casi in cui $(\phi, z) = (0, 0)$ è punto stazionario. Si riscrivono, quindi, i casi (i), (ii) e (iii) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \Delta > 0 & \iff \begin{cases} \Lambda < -1, & \text{se } k \text{ è pari} \\ \Lambda > 1, & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \implies \text{due radici reali distinte;} \\ \text{(ii)} \quad \Delta < 0 & \iff \begin{cases} \Lambda > -1, & \text{se } k \text{ è pari} \\ \Lambda < 1, & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \implies \text{due radici complesse coniugate;} \\ \text{(iii)} \quad \Delta = 0 & \iff \begin{cases} \Lambda = -1, & \text{se } k \text{ è pari} \\ \Lambda = 1, & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \implies \text{due radici reali e coincidenti;} \end{aligned}$$

Si supponga, dapprima, soddisfatta (i); si definisca, allora, la pulsazione

$$\Omega_+ := \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1}{\hbar} |J| \sqrt{(-1)^{k+1} \Lambda - 1}, \quad (3.35)$$

dove si è introdotta la forza adimensionale Λ come

$$\Lambda := \frac{NU}{2J}. \quad (3.36)$$

Dato che la traccia della matrice A è nella gli autovalori si possono trovare come: $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\Delta}/2 = \pm \Omega_+$. Con queste informazioni è possibile farsi un'idea riguardo l'evoluzione temporale del sistema.

Sapendo che $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, si deduce che il punto stazionario $(\phi, z) = (0, 0)$ è un punto di *sella*. Ciò significa che per $t \rightarrow \infty$ si avrà che la coordinata dinamica tende a 0, $\phi \rightarrow 0$, indipendentemente dal dato iniziale (ϕ_0, z_0) , mentre il momento coniugato z tende a +1 se $z_0 > 0$ oppure -1 se $z_0 < 0$.

Il sistema non è più simmetrico perchè si ha che, dopo un tempo sufficientemente lungo, tutte le particelle del sistema si troveranno nella sola buca di destra o nella sola buca di sinistra, in base alle condizioni iniziali. Si procede, ora, a risolvere analiticamente l'equazione differenziale (3.33).

Si nota che A è diagonalizzabile, cioè \exists una matrice P invertibile, data da:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a-\Omega_+}{c} & \frac{a+\Omega_+}{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

tale per cui $A = P D P^{-1}$, dove D è la matrice diagonale con gli autovalori λ_{\pm} sulla diagonale. Si ha, allora, che $e^A = e^{P D P^{-1}} = P e^D P^{-1}$.

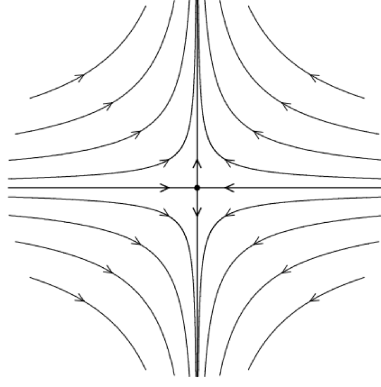


Figura 3.1: Andamento delle orbite per un punto di sella. Le orbite per soluzioni in cui il dato iniziale ha entrambe le coordinate diverse da 0 sono delle iperboli. Le orbite restanti sono costituite dai quattro semiassi e dall'origine. Le orbite non sono limitate e nemmeno periodiche. In base al dato iniziale troviamo che il punto di equilibrio può essere attrattivo o repulsivo per $t \rightarrow +\infty$

Calcolando, quindi, la matrice esponenziale di At , si ricavano le soluzioni dell'equazione differenziale (3.33) nel caso (i), che risultano essere:

$$\phi(t) = \phi_0 \left[\cosh(\Omega_+ t) + \frac{(-1)^k \pi k J}{\Omega_+ \hbar} \sinh(\Omega_+ t) \right] + z_0 \frac{(-1)^k (1 + \pi^2 k^2) + \Lambda}{\Omega_+} \frac{J}{\hbar} \sinh(\Omega_+ t) \quad (3.38)$$

$$z(t) = \phi_0 \frac{(-1)^{k+1}}{\Omega_+} \frac{J}{\hbar} \sinh(\Omega_+ t) + z_0 \left[\cosh(\Omega_+ t) - \frac{(-1)^k \pi k J}{\Omega_+ \hbar} \sinh(\Omega_+ t) \right]. \quad (3.39)$$

Se, invece, si suppone che (ii) sia soddisfatta, si definisca la pulsazione

$$\Omega_- := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{1}{\hbar} |J| \sqrt{(-1)^k \Lambda + 1}, \quad (3.40)$$

in cui Λ è nuovamente la forza adimensionale definita in (3.36). Anche in questo caso $\text{Tr} A = 0$ e di conseguenza gli autovalori saranno della forma: $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\Delta}/2 = \pm i\Omega_-$, dove i è l'unità immaginaria. Si trova, dunque, che gli autovalori sono complessi coniuganti con parte reale nulla. Il punto di equilibrio, quindi, è un cosiddetto *centro*. Le orbite sono delle circonferenze con il punto stazionario come centro. Ciò significa che ϕ e z evolvono in maniera periodica e simmetrica. Risolvendo analiticamente

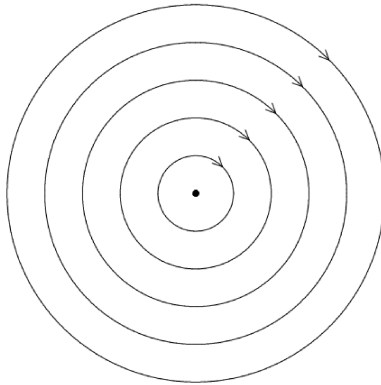


Figura 3.2: Andamento delle orbite per un punto di centro. Le orbite sono circonferenze con centro il punto di equilibrio del sistema. Il raggio della circonferenza delle orbite è determinato dal dato iniziale (ϕ_0, z_0) . Le soluzioni, dunque, evolvono periodicamente passando per $\phi = 0$ e $z = 0$, ma mai allo stesso istante.

anche per questo caso, in maniera analoga al caso (i), si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\phi(t) = \phi_0 \left[\cos(\Omega_- t) + \frac{(-1)^k \pi k J}{\Omega_- \hbar} \sin(\Omega_- t) \right] + z_0 \frac{(-1)^k (1 + \pi^2 k^2) + \Lambda}{\Omega_-} \frac{J}{\hbar} \sin(\Omega_- t) \quad (3.41)$$

$$z(t) = \phi_0 \frac{(-1)^{k+1}}{\Omega_-} \frac{J}{\hbar} \sin(\Omega_- t) + z_0 \left[\cos(\Omega_- t) - \frac{(-1)^k \pi k J}{\Omega_- \hbar} \sin(\Omega_- t) \right]. \quad (3.42)$$

Se, infine, si considera il caso (iii), la matrice A ha solo un autovalore di molteplicità 2, il cui valore è $\lambda_0 = 0$. Le orbite sono rette parallele all'asse ϕ percorse con momento $z(0)$.

Per risolvere analiticamente anche questo caso si nota che, se (iii) è vera, A è nilpotente e per matrici nilpotenti si ha che $e^{At} = \mathbb{1} + At$. Le soluzioni dell'equazione differenziale (3.33) nel caso (iii) sono quindi:

$$\phi(t) = \phi_0 \left[1 + (-1)^k \frac{\pi k J}{\hbar} t \right] + z_0 \left[(-1)^k (1 + \pi^2 k^2) + \Lambda \right] \frac{J}{\hbar} t \quad (3.43)$$

$$z(t) = \phi_0 (-1)^{k+1} \frac{J}{\hbar} t + z_0 \left[1 - (-1)^k \frac{\pi k J}{\hbar} t \right]. \quad (3.44)$$

3.4 Punti critici del sistema non-linearizzato

Tornando al sistema non-linearizzato (3.19) se ne studiano le soluzioni stazionarie. Si trova una prima classe di soluzioni simmetriche

$$(\tilde{z}_-, \tilde{\phi}_n) = \left(0, 2n\pi + \frac{N}{2}\theta \right) \quad (3.45)$$

$$(\tilde{z}_+, \tilde{\phi}_n) = \left(0, (2n+1)\pi + \frac{N}{2}\theta \right), \quad (3.46)$$

con $n \in \mathbb{Z}$, nelle quali il sistema ha energia, rispettivamente, $\tilde{E}_- = -JN$ e $\tilde{E}_+ = JN$. Si nota che la presenza del θ anyonico modifica i punti di equilibrio del sistema, come visto in (3.27).

Inoltre, a causa delle interazioni intraparticellari non-lineari, si trova una seconda classe di punti stazionari i quali rompono la z -simmetria del sistema:

$$\phi_{n,\pm} = (2n+1)\pi + \frac{N}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \right) \theta \quad (3.47)$$

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \quad \text{se} \quad \Lambda > 0 \quad (3.48)$$

e

$$\phi_{n,\pm} = 2n\pi + \frac{N}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \right) \theta \quad (3.49)$$

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} \quad \text{se} \quad \Lambda < 0, \quad (3.50)$$

con $n \in \mathbb{Z}$ e $|\Lambda| > 1$. L'energia del sistema in questi stati è $E_{SSB} = \frac{1}{2}(\Lambda + 1/\Lambda)$.

Per un sistema caratterizzato da dato iniziale $(\phi(0), z(0))$ e $\Lambda > 0$, si possono ricavare, allora, i valori critici di Λ e θ che caratterizzano il punto di rottura spontanea della simmetria (**S**pontaneous **S**ymmetry **B**reaking). Si chiamano tali valori Λ_{SSB} e θ_{SSB} ed hanno le seguenti espressioni:

$$\Lambda_{SSB} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2(0)}} \quad (3.51)$$

$$\theta_{SSB} = \frac{\phi(0) - (2n+1)\pi}{\frac{N}{2}(1 - z(0))}, \quad (3.52)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Quando il valore della forza adimensionale Λ eccede il valore Λ_{SSB} e quando

$$\theta_{SSB} < \theta < \theta_{SSB} + \frac{\pi}{\frac{N}{2}(1 - z(0))} \quad (3.53)$$

il sistema entra in uno stato particolare che verrà discusso in maniera più dettagliata nella sezione [3.5]. I valori critici per il caso in cui la forza adimensionale del sistema Λ è negativa si ricavano analogamente a partire da (3.49) e (3.50).

Un altro regime critico per il sistema si ha quando la condizione

$$\frac{H(\phi(0), z(0))}{NJ} = \frac{\Lambda^2}{2} z^2(0) - \sqrt{1 - z^2(0)} \cos\left(\phi(0) + \frac{N}{2}(1 - z(0))\theta\right) > 1 \quad (3.54)$$

è soddisfatta. Allora $\langle z \rangle_t \neq 0$ dato che $z(t)$ non può essere zero durante l'oscillazione. Tale fenomeno è noto come **Macroscopic Quantum Self Trapping (MQST)** e si trova che, in termini della forza adimensionale Λ , il regime di auto-intrappolamento si verifica per valori di Λ maggiori del valore critico dato da

$$\Lambda_{MQST}(\theta) = \frac{1 + \sqrt{1 - z^2(0)} \cos\left(\phi(0) + \frac{N}{2}(1 - z(0))\theta\right)}{z^2(0)/2}. \quad (3.55)$$

3.5 Analisi numerica del sistema a N anyons

L'informazione che si può ricavare dal sistema linearizzato e dallo studio dei punti critici è parziale. Vorremmo conoscere il comportamento del sistema in termini più generali. Si opta, quindi, per un approccio numerico a partire dalle equazioni (3.23 - 3.24). Si fissa per semplicità $\hbar = 1$ e $J = 1$ come unità di energia e il numero totale di particelle, $N = 1000$, in modo da essere sicuri di poter usare effettivamente un hamiltoniana di tipo Bose-Hubbard. Si tengono come parametri del sistema, l'energia di interazione tra particelle nello stesso sito, U , che verrà espressa in termini di Λ (vedi 3.36) dato che N e J sono fissi, e l'angolo anyonico θ .

Si computa, come prima osservazione, un confronto tra soluzione esatte del sistema e soluzioni del sistema linearizzato trovate nella sezione (3.3).

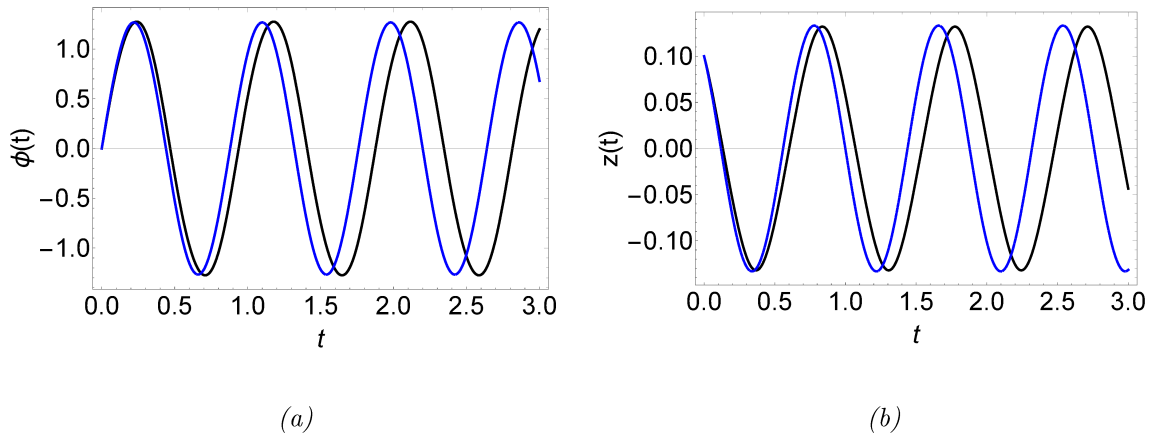


Figura 3.3: Confronto fra soluzioni esatte (**nero**) e soluzioni del sistema linearizzato (**blu**). Nei pannelli in figura sono rappresentate le soluzioni $\phi(t)$ ((a)) e $z(t)$ ((b)) con dati iniziali $(\phi(0), z(0)) = (0, 0.1)$, forza adimensionale $\Lambda = 50$ e parametro anyonico $\theta = \frac{4\pi}{N}$. Tale valore di θ è stato scelto in modo da rispettare la condizione $\theta = \frac{2\pi}{N}k$, per cui $(0, 0)$ è punto stazionario e, quindi, per cui le soluzioni del sistema linearizzato sono valide in un intorno di esso. Come ci si aspetterebbe le soluzioni del sistema linearizzato approssimano in maniera fedele il sistema esatto per tempi “piccoli”, ma al crescere del tempo soluzioni esatte e soluzioni approssimate si discostano sempre più.

Come rimarcato precedentemente, si considera il sistema linearizzato all'intorno del punto stazionario $(\phi, z) = (0, 0)$, valido se soddisfatta la condizione sul parametro anyonico: $\theta = \frac{2\pi}{N}k$. Nella sezione (3.3) si sono trovate tre famiglie di soluzioni diverse al variare della forza adimensionale Λ e di θ . Nei casi (i) e (iii), le soluzioni del sistema approssimato sono molto instabili e si discostano rapidamente da quelle del sistema esatto. Nel caso (ii), invece, essendo le soluzioni di tipo sinusoidale, è possibile apprezzare in maniera più chiara la bontà dell'approssimazione effettuata. Si nota, infatti, che le soluzioni del sistema linearizzato seguono fedelmente le soluzioni esatte per tempi "piccoli", mentre al crescere del tempo, come ci si sarebbe aspettato, iniziano lentamente a discostarsi l'un l'altra.

Passando, ora, ad un'analisi più dettagliata del sistema non-linearizzato, si analizza dapprima il caso in cui $\Lambda_{MQST}(0) > \Lambda$. La presenza del θ anyonico influenza in maniera piuttosto complicata il sistema.

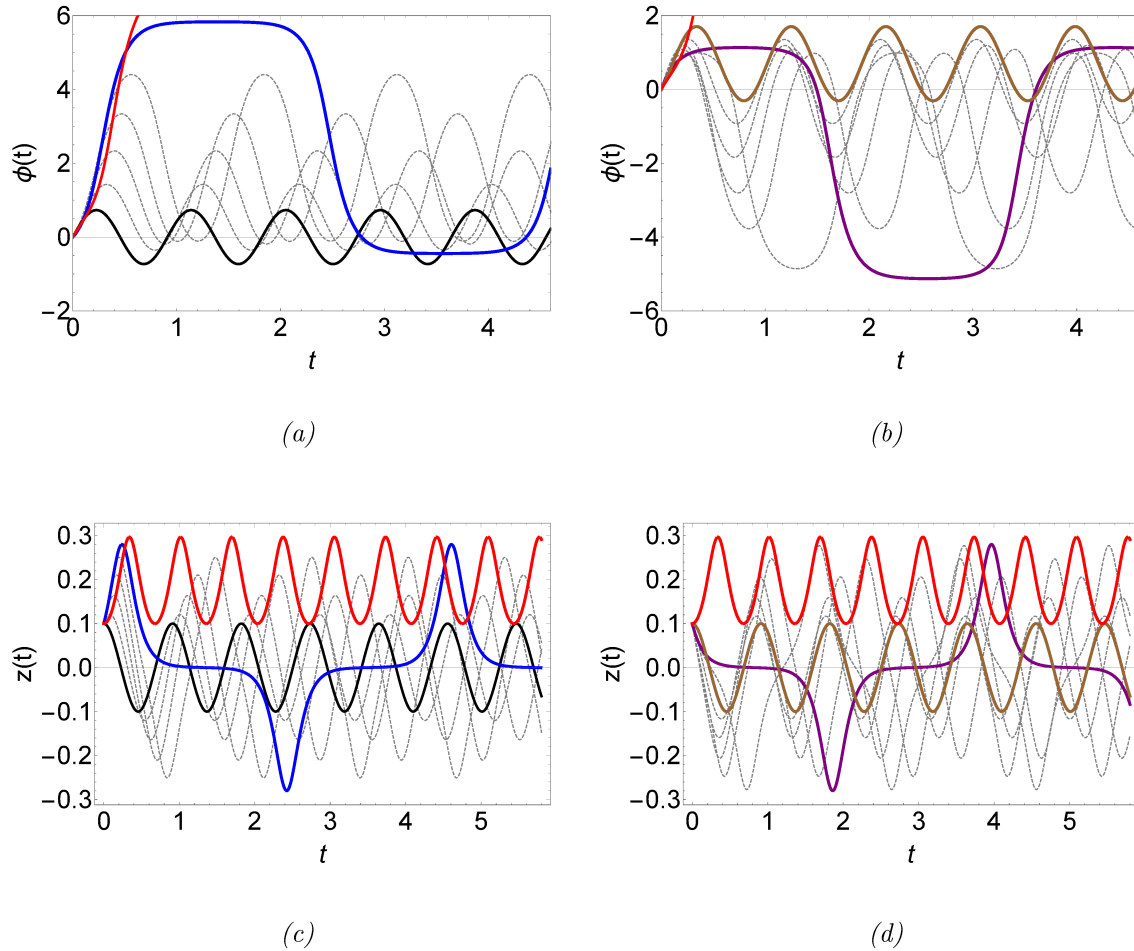


Figura 3.4: Andamento delle soluzioni differenza di fase $\phi(t)$ ((a) e (b)) e squilibrio di popolazione $z(t)$ ((c) e (d)) in funzione del tempo. Nei pannelli in figura si mostrano le soluzioni con dati iniziali $(\phi(0), z(0)) = (0, 0.1)$ e con forza adimensionale $\Lambda = 50$. Le soluzioni sono valutate per i valori dell'angolo anyonico $\theta = 0$ (nero, **caso bosonico**), 5.39×10^{-3} (blu, **inizio auto-intrappolamento**), 6.98×10^{-3} (rosso, **riflessione**), 8.57×10^{-3} (viola, **fine auto-intrappolamento**), 1.39×10^{-2} (marrone, **caso "simil"-bosonico**). Le linee tratteggiate in grigio rappresentano soluzioni valutate per valori di θ intermedi a quelli evidenziati.

In particolare si vede che, come descritto in (3.55), il valore critico per il quale avviene il fenomeno di auto-intrappolamento dipende, non solo dal dato iniziale $(\phi(0), z(0))$, ma anche da θ secondo una legge sinusoidale. In Figura 3.4 si vede, infatti, come le soluzioni, al variare di θ , varino in ampiezza e frequenza in maniera continua fino a quando $\Lambda_{MQST}(\theta) \simeq \Lambda$. Quando ciò si verifica le soluzioni si deformano fino ad entrare in regime di auto-intrappolamento per $\Lambda_{MQST}(\theta) < \Lambda$, in cui $\langle z \rangle_t \neq 0$. È possibile, inoltre, apprezzare un altro fenomeno che nel caso bosonico si sarebbe trovato solo per determinati valori di Λ , ma che nel caso anyonico viene a dipendere anche dal valore dell'angolo θ . Infatti,

come trovato nella sezione precedente, esistono delle soluzioni degeneri che rompono la z -simmetria del sistema. Nel caso in esame Λ è fissato in modo tale che $\Lambda > \Lambda_{SSB} = 1/\sqrt{1 - z^2(0)} \simeq 1.005$ e si vede che per valori di θ compresi nell'intervallo descritto in (3.53), quindi oltrappassato in punto di rottura della z -simmetria, il sistema cade in un secondo tipo di stato intrappolato, in cui le soluzioni sono riflesse, analogamente a quanto succede nel caso bosonico², in cui l'unica condizione richiesta è $\Lambda > \Lambda_{SSB}$. È interessante notare infine che, dopo una variazione di θ pari a

$$\theta_b = \frac{4\pi n}{N(1 - z(0))} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.56)$$

lo stato in cui si trova il sistema è tale per cui l'evoluzione temporale dello squilibrio di popolazione, $z(t)$, è uguale a quella del caso bosonico, mentre $\phi(t)$ acquista un incremento in ampiezza e un offset rispetto al caso bosonico. È possibile vedere facilmente che θ_b è un massimo per $\Lambda_{MQST}(\theta)$, inoltre costituisce l'estremo destro della condizione su θ di rottura della z -simmetria (3.53). Quindi, per $\theta = \theta_b$, il sistema non si trova più in nessuno dei due regimi di auto-intrappolamento descritti, ma torna ad essere in un regime non intrappolato.

Si trova, quindi, una regolarità nell'evoluzione del sistema anyonico rispetto a variazioni dell'angolo θ . Esso evolve in maniera continua fino al valore di θ pari a

$$\theta_{MQST} = \frac{1}{\frac{N}{2}(1 - z(0))} \left\{ \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 - z^2(0)}} \left(\frac{\Lambda}{2} z^2(0) - 1 \right) \right] - \phi(0) \right\}, \quad (3.57)$$

in cui il sistema entra in un primo stato di auto-intrappolamento. Un secondo stato di auto-intrappolamento si ha una volta superata la condizione di rottura della simmetria per cui le soluzioni subiscono una riflessione. Infine, per $\theta = \theta_b$ il sistema non si trova più in uno stato di auto-intrappolamento né c'è rottura della simmetria e si comporta, almeno per quanto riguarda lo squilibrio di popolazione come un sistema puramente bosonico.

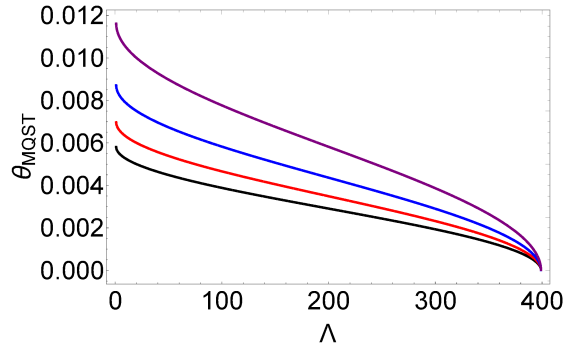


Figura 3.5: Andamento della condizione di auto-intrappolamento vista in termini di $\theta_{MQST}(\Lambda)$. Nel pannello in figura è mostrato il caso con dati iniziali $(\phi_0, z_0) = (0, 0.1)$. Si è variato il numero N di particelle totali del sistema. In particolare: $N = 1200$ (nero), $N = 1000$ (rosso), $N = 800$ (blu) e $N = 600$ (viola).

Si studia anche il sistema con $\Lambda_{MQST}(0) < \Lambda$. In questo caso si ha che la condizione di auto-intrappolamento è sempre soddisfatta, $\forall \theta$, dato che per $\theta = 0$, $\Lambda_{MQST}(\theta)$ ha un massimo. Anche in questo caso è possibile apprezzare la riflessione delle soluzioni che avviene oltrappassato il punto di rottura della z -simmetria e la presenza di stati “simil”-bosonici per valori di $\theta = \theta_b$. La caratteristica più interessante dei grafici in Figura 3.6 è che è possibile notare, in maniera più chiara rispetto al caso precedente, il fatto che per oscillazioni auto-intrappolate l'evoluzione della differenza di fase, $\phi(t)$, non è più confinata come nel caso non intrappolato, ma ha dominio:

$$-\infty < \phi(t) < \infty. \quad (3.58)$$

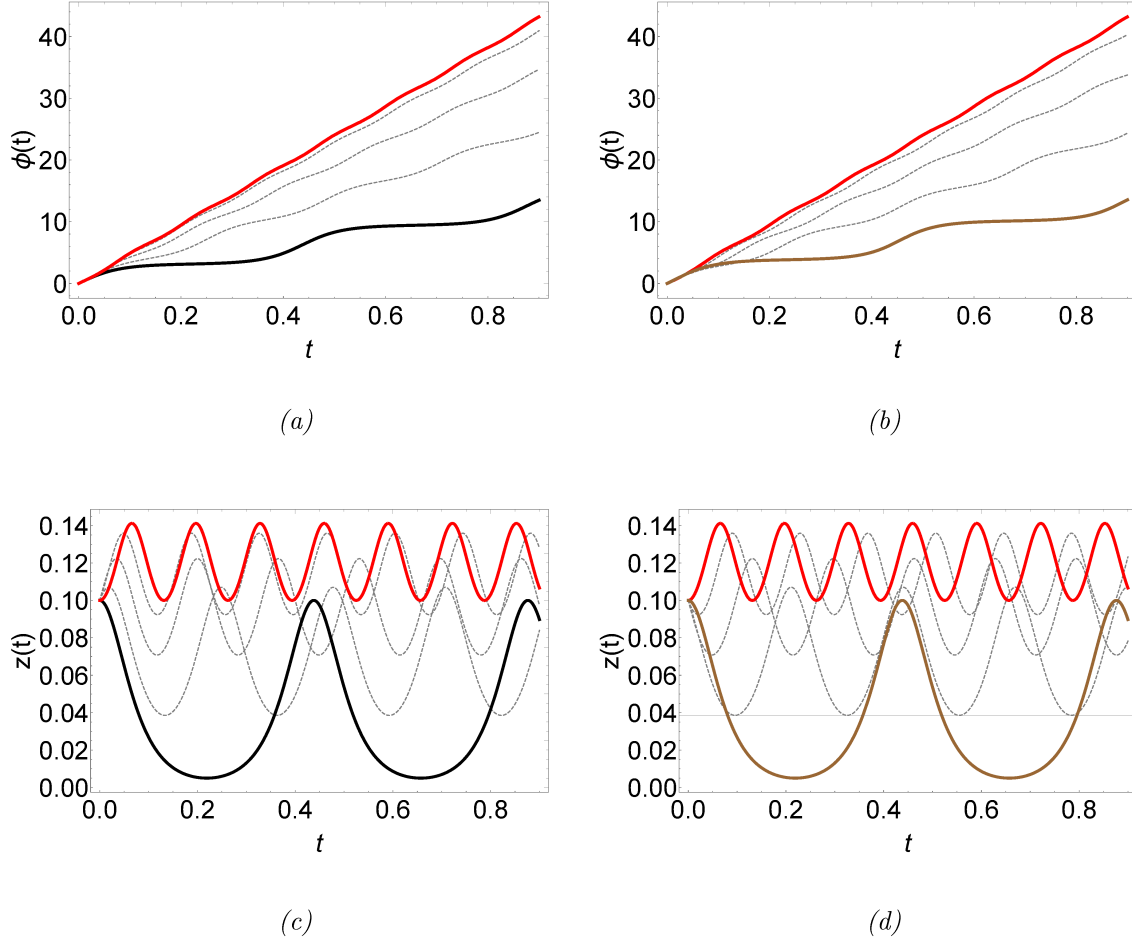


Figura 3.6: Andamento delle soluzioni differenza di fase $\phi(t)$ ((a) e (b)) e equilibrio di popolazione $z(t)$ ((c) e (d)) in funzione del tempo. Nei pannelli in figura si mostrano le soluzioni con dati iniziali $(\phi(0), z(0)) = (0, 0.1)$ e con forza adimensionale $\Lambda = 400$. Le soluzioni sono valutate per i valori dell'angolo anyonico $\theta = 0$ (nero, **caso bosonico**), 6.98×10^{-3} (rosso, **riflessione**), 1.39×10^{-2} (marrone, **caso “simil”-bosonico**). Le linee tratteggiate in grigio rappresentano soluzioni valutate per valori di θ intermedi a quelli evidenziati.

Capitolo 4

Conclusioni

Si è ricavata la hamiltoniana del modello di Bose-Hubbard a due siti e se ne sono discusse le ipotesi di validità e le condizioni per le quali la sua applicazione è sensata. Si è fatto uso degli stati coerenti per ricavare dalla hamiltoniana del modello informazioni sulla dinamica del sistema e si sono trovate, quindi, le equazioni di Josephson.

Si è proposta, poi, una nuova configurazione con la stesse caratteristiche della precedente, fuorché per la natura delle particelle coinvolte che, nel nuovo caso, sono *anyons*. Si sono introdotte delle trasformazioni che mappano operatori anyonici in operatori bosonici, grazie alla quali è stato possibile descrivere il nuovo sistema con gli stessi strumenti matematici usati in precedenza per particelle bosoniche.

Si è visto come la presenza del parametro statistico anyonico θ modifichi il comportamento del sistema. In particolare, si è sottolineato come θ vada ad influenzare le condizioni per cui avviene l'auto-intrappolamento del sistema e di come ne modifichi la condizione di rottura della z-simmetria. Tuttavia, si è visto che, per variazioni di θ lontane dai valori critici di auto-intrappolamento e di rottura della z-simmetria, la risposta del sistema a tali variazioni è pressoché lineare. Si è notato, inoltre, la presenza, per determinati valori di θ , di stati con la particolarità di seguire, in termini dello squilibrio di popolazione, la stessa identica dinamica degli stati bosonici.

Bibliografia

- [1] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131:2766–2788, Settembre 1963.
- [2] J. S. Langer. Coherent states in the theory of superfluidity. ii. fluctuations and irreversible processes. *Phys. Rev.*, 184:219–229, Aug 1969.
- [3] James R. Johnston. Coherent states in superfluids: The ideal einstein-bose gas. *American Journal of Physics*, 38(4):516–528, 1970.
- [4] V. Srinivasan. On the Connection between the Boson Transformed Ground State and the Coherent State. *Progress of Theoretical Physics*, 55(3):939–940, March 1976.
- [5] B. D. Josephson. The discovery of tunnelling supercurrents. *Rev. Mod. Phys.*, 46:251–254, Apr 1974.
- [6] E. Fradkin. Jordan-wigner transformation for quantum-spin systems in two dimensions and fractional statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 63:322–325, Jul 1989.
- [7] H. Bruus and K. Flensberg. *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, 2004.
- [8] J. Dobrzyniecki and T. Sowiński. Effective two-mode description of a few ultra-cold bosons in a double-well potential. *Physics Letters A*, 382(6):394 – 399, 2018.
- [9] S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni, and S. R. Shenoy. Coherent oscillations between two weakly coupled bose-einstein condensates: Josephson effects, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping. *Phys. Rev. A*, 59:620–633, Jan 1999.
- [10] B. I. Halperin. Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized hall states. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1583–1586, Aprile 1984.
- [11] F. Wilczek. Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Phys. Rev. Lett.*, 49:957–959, Oct 1982.
- [12] F.D.M. Haldane. 'fractional statistics' in arbitrary dimensions: A generalization of the pauli principle. *Phys. Rev. Lett.*, 67:937–940, 1991.
- [13] M. Frau, A. Lerda, and S. Sciuto. Anyons and deformed Lie algebras. In *International School of Physics 'Enrico Fermi': 127th Course: Quantum Groups and Their Physical Applications*, pages 215–244, 6 1994.
- [14] T. Keilmann, I. McCulloch, and M. Roncaglia. Statistically induced phase transitions and anyons in 1d optical lattices. *Nature Communications*, 2:361, Giugno 2011.
- [15] S. Greschner and L. Santos. Anyon hubbard model in one-dimensional optical lattices. *Physical Review Letters*, 115(5), Jul 2015.